

8. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$\begin{aligned} (x^5 - 17x^3 + \sqrt{3x} - 8)' &= (x^5)' + (-17x^3)' + (\sqrt{3x})' + (-8)' = \\ &= 5x^4 - 17 \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot (3x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x)' + 0 = 5x^4 - 51x^2 + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3x}} \end{aligned}$$

Příklad 1 (b)

$$((x^2 - 2x + 3)e^x)' = ((x^2 - 2x + 3))' \cdot e^x + (x^2 - 2x + 3) \cdot (e^x)' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 3)e^x = (x^2 + 1)e^x.$$

Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$.

Příklad 1 (c) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (d)

$$\begin{aligned} (x \log x + x \log_3 x + 2e^x)' &= x' \log x + x(\log x)' + x' \log_3 x + x(\log_3 x)' + (2e^x)' = \\ &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \log_3 x + x \cdot \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)' + 2e^x = \log x + 1 + \log_3 x + \frac{1}{\log 3} + 2e^x \end{aligned}$$

Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$ ze stejného důvodu.

Příklad 1 (e) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)' = (e^{x \cdot \log \frac{3}{2}})' = \log \frac{3}{2} \cdot e^{x \cdot \log \frac{3}{2}} = \log \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$, nebo lze alternativně použít vzorec $(c \cdot a^x)' = c \log a \cdot a^x$. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, neboť mocnění výraz je kladný.

Příklad 1 (f) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce i derivace jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť potřebujeme nenulové číslo ve jmenovateli.

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 + 5x - 6}\right)' &= \frac{(x^2 - 2x + 7)' \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (x^2 + 5x - 6)'}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \\ &= \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x + 12 - (2x^3 + x^2 + 4x + 35)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \\ &= \frac{7x^2 - 26x - 23}{(x^2 + 5x - 6)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$ kvůli nenulovosti jmenovatele.

Příklad 1 (h) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \log x)' = c \cdot \frac{1}{x}$ a $(c \cdot \cos x)' = c \cdot (-\sin x)$. Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace je pak také definována na $(0, \infty)$.

Příklad 1 (i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x \cos x - 2}{\log x} \right)' &= \frac{(x \cos x - 2)' \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - x \cos x + 2}{x(\log x)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $(0, \infty) \setminus \{0\}$ kvůli definičnímu oboru logaritmu a požadavku na nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (j) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \tan x)' = c \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ a $(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (k) $(\sin x \cos x - \tan x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' - (\tan x)' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (l) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arcsin x)' = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcussinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (m) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorece $(c \cdot \arccos x)' = c \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccotan} x)' = c \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcuscosinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 2 (a) Nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme za věty o derivaci složené funkce

$$((x^2 + 50x + 12)^{78})' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(x^2 + 50x + 12)' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(2x + 50).$$

Odtud vidíme, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

Příklad 2 (b) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Použijeme vzorce pro derivaci součinu tří funkcí $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Počítejme

$$\begin{aligned} (x^3(x+2)^8(x-7)^{-11})' &= 3x^2 \cdot (x+2)^8(x-7)^{-11} + x^3 \cdot 8(x+2)^7 \cdot (x-7)^{-11} + \\ &+ x^3(x+2)^8 \cdot (-11)(x-7)^{-12} = -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Příklad 2 (c) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\operatorname{arccotan}(2x))' = -\frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = -\frac{2}{1+4x^2}$$

a vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme dle pravidla pro derivaci součinu

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 2 (e) Spočítáme, že $x^2 + x + 2 > 0$ na $\mathbb{R}$, a tudíž $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\log(x^2 + x + 2))' = \frac{1}{x^2 + x + 2} \cdot (x^2 + x + 2)' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2}.$$

Z toho je vidno, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\cos(x^3 - x + 2)^9)' = -\sin(x^3 - x + 2)^9 \cdot ((x^3 - x + 2)^9)' = -\sin(x^3 - x + 2)^9 \cdot 9(x^3 - x + 2)^8 \cdot (3x^2 - 1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (g) Chceme, aby výraz v odmocnině byl kladný. Odtud dostáváme $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$. Spočítáme derivaci

$$(\sqrt{4-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (4-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-2, 2)$.

Příklad 2 (h)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Definiční obor f

$$9 - x^2 > 0 \iff (3-x)(3+x) > 0 \iff x \in (-3, 3) = D(f)$$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot (\sqrt{9-x^2})'}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (9-x^2)'}{9-x^2} = \\ &= \frac{\sqrt{9-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x)}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2) \cdot \sqrt{9-x^2}} = 9 \cdot (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Definiční obor f' $D(f') = (-3, 3)$

Příklad 2 (i)

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x} \right)' = \frac{(x^2(1-x)^3)' \cdot (1+x) - (x^2(1-x)^3) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{\left((x^2)'(1-x)^3 + x^2((1-x)^3)' \right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{(2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2 \cdot (1-x)')) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{2x(1-x)^3(1+x) - 3x^2(1-x)^2(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{x(1-x)^2(2(1-x^2) - 3x(1+x) - x(1-x))}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2(2 - 2x^2 - 3x - 3x^2 - x + x^2)}{(1+x)^2} = \\
&= \frac{x(1-x)^2(2 - 4x^2 - 4x)}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Příklad 2 (j)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1)(-2)x^{-3} = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (k)

$$f(x) = x^x$$

Definiční obor f $D(f) = (0, \infty)$, protože z definice obecné mocniny plyne, že $x^x = e^{x \log x}$.

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^x)' = \left(e^{x \log x} \right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot (x' \cdot \log x + x \cdot (\log x)') = \\
&= e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\log x + 1)
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = (0, \infty)$$

Příklad 2 (l)

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = (0, \infty)$$

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}} \right)' = \\ &= e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1}{x} \right)' \log x + x \cdot (\log x)' \right) = \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \log x + x \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\log x}{x^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f) = (0, \infty)$$

Příklad 2 (m)

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

Definiční obor f

Opět z definice obecné mocniny plyne, že je potřeba, aby $\sin x > 0$. Tedy $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\cos x \cdot \log \sin x} \right)' = \\ &= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot (\cos x \cdot \log \sin x)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot ((\cos x)' \cdot \log \sin x + \cos x \cdot (\log \sin x)') = \\ &= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \right) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi).$$

Příklad 2 (n)

$$f(x) = \arcsin(\cos x)$$

Definiční obor f Definiční obor $\arcsin$ je interval $[-1, 1]$ a obor hodnot $\cos$ je $[-1, 1]$. Proto $D(f) = D(\cos) = \mathbb{R}$.

Derivace f

$$f'(x) = (\arcsin(\cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

Spočtený výraz je definován pouze pro $x \in \mathbb{R}$ taková, že $\cos^2 x \neq 1$, tedy $\cos x \neq \pm 1$. Definován je tedy na množině $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

V bodech $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, je třeba derivaci vyřešit zvlášť. Z definice funkcí $\arcsin$ a $\cos$ víme, že je funkce f spojitá. Můžeme tedy použít Větu 3.27 o jednostranné derivaci. Nechť $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
f'_-(k\pi) &= \lim_{x \rightarrow k\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi-} \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow k\pi-} \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow k\pi-} \frac{-\sin x}{|\sin x|} = \\
&= \lim_{x \rightarrow k\pi-} (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1} \\
f'_+(k\pi) &= \lim_{x \rightarrow k\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi+} \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow k\pi+} \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow k\pi+} \frac{-\sin x}{|\sin x|} = \\
&= \lim_{x \rightarrow k\pi+} (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^k
\end{aligned}$$

Ve výpočtech výše jsme využili toho, že na levém prstencovém okolí bodu $k\pi$ je $\sin$ kladný pro sudé k a záporný pro liché k . Podobně pro pravé prstencové okolí. Jednostranné derivace jsou zřejmě různé, proto v daných bodech existují pouze jednostranné derivace a nikoli derivace jako taková.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Příklad 2 (o)

$$f(x) = \log(\arccos x)$$

Definiční obor f

$$D(f) = [-1, 1)$$

Derivace f

$$f'(x) = (\log(\arccos x))' = \frac{1}{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definiční obor f'

$D(f') = (-1, 1)$ a v bodě -1 má funkce pouze jednostrannou derivaci.

Příklad 2 (p)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{1 + \frac{2}{x^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{2 + x^2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2 + x^2}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (q)

$$f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (x^2-x+1)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^{2x})' \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot (e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (r)

$$f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = (1, \infty)$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}} \right)' = \\
&= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2-1})^2} \cdot (\sqrt{x^2-1})' - \frac{(\log x)' \cdot \sqrt{x^2-1} - \log x \cdot (\sqrt{x^2-1})'}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \\
&= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' - \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2-1} - \log x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)'}{x^2-1} = \\
&= \frac{2x}{2x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}} - \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} - \log(x) \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \\
&= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{(x^2-1) - x^2 \log x}{x\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = \frac{x^2 \log x}{x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x \log x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = (1, \infty)$$

Příklad 2 (s)

$$f(x) = x (\arcsin(x^3))^2$$

Definiční obor f $D(f) = [-1, 1]$

Derivace f

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(x (\arcsin(x^3))^2 \right)' = x' \cdot (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot \left((\arcsin(x^3))^2 \right)' = \\&= (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot 2 \cdot \arcsin(x^3) \cdot (\arcsin(x^3))' = \\&= (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot (x^3)' = \\&= (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$D(f') = (-1, 1)$ a v krajních bodech existují jednostranné derivace.